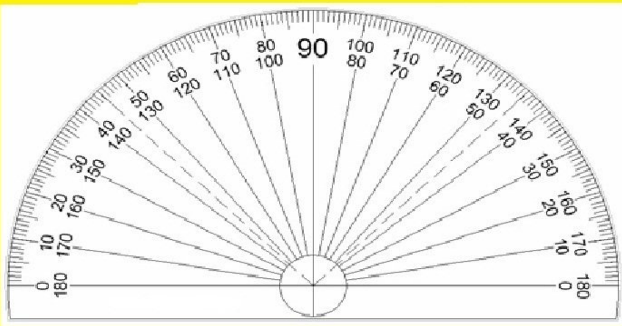
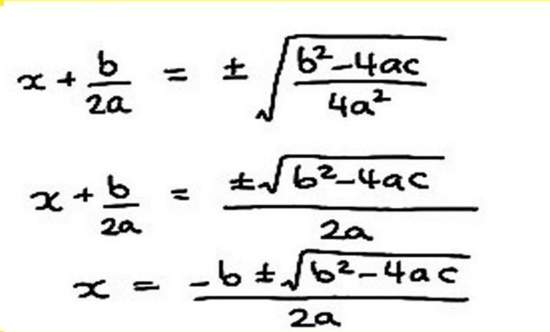
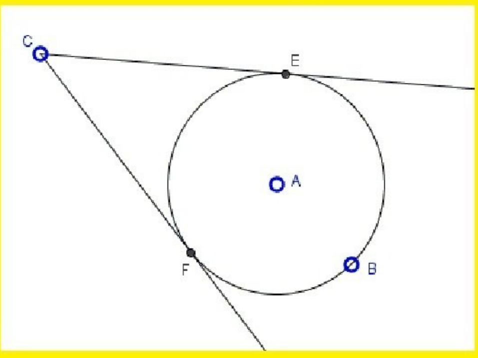
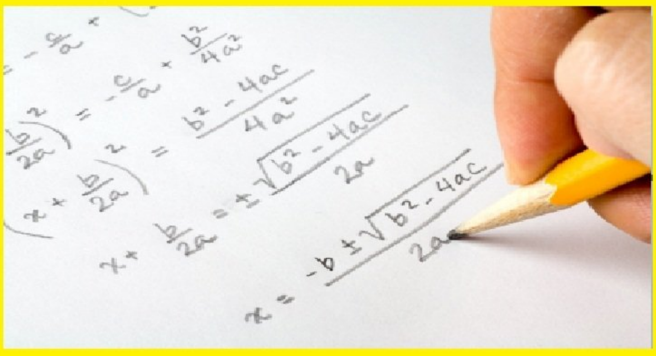
ÉRETTSÉGIZÜNK LE MATEMATIKÁBÓL

BÁRDI IMRE









Érettségizzünk le matematikából !

Bárdi Imre

Publió Kiadó

2014

Előszó

A könyvet elsősorban érettségi előtt álló vagy felvételi előtt levő diákok számára írtam. Olyan fogalmakat mutat be érthetően mint például az exponenciális egyenlet, a logaritmus és a sorozatok.

Nagy hangsúly fektettem arra, hogy minél több olyan dolgot mutassak be amik biztosan fognak szerepelni az érettségin és hogy minél több megoldott feladattal magyarázzam el ezeket a dolgokat.

A feladatok nagy részét a 2012 -es és 2013 -as érettségi tételekből vettem. Az elmélet átvesz és elmagyaráz mindent amire a matematika érettségihez szükség lesz.

Jó tanulmányozást és minél jobb érettségit kíván

A szerző

Drága édesanyám emlékére

Másodfokú egyenlet

Az egyik nagyon fontos dolog, hogy tudjunk másodfokú egyenleteket megoldani, mivel rengeteg feladat visszavezetődik egy másodfokú egyenlet megoldására.

A másodfokú egyenlet általános alakja

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0\,;\, a, b \text{ és } c \text{ akármilyen valós számok lehetnek.}$$

Például a következő egyenletek mind másodfokú egyenletek

$$3x^2 - 7x + 15 = 0\,, -4x^2 + 6 = 0\,, -12x^2 - 5x = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképlete

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Csak akkor van az egyenletnek megoldása a valós számok halmazában, ha a gyök alatti kifejezés pozitív vagy 0, hiszenm negatív számból nem vonhatunk gyököt a valós számok halmazában.

A gyök alatti kifejezést deltával szokták jelölni, mert ettől függ hogy van e valós szám megoldás vagy nincs.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Ha úgy szól a feladat szövege, hogy oldjunk meg a valós számok halmazán egy adott másodfokú egyenletet akkor először mindig kiszámítjuk ezt a delta kifejézt behelyettesítéssel és 3 eset lehetséges

1. $\Delta < 0$, *ekkor nincs a valós számok halmazában megoldás*
2. $\Delta = 0$, *ekkor két egyenlő valós megoldás van*

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = -\frac{b}{2a}$$

3. $\Delta > 0$, *ekkor két különböző valós szám megoldása van*

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ és } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Az a , b és c számokat előjelükkel együtt kell behelyettesíteni a megoldóképletbe tehát ha negatív előjelük van, akkor azzal együtt.

Például

$$-2x^2 + 5x - 3 = 0$$

Azonosítjuk az a, b és c számokat

$$a = -2, b = 5, c = -3 .$$

Az első lépés az, hogy kiszámítjuk a

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

kifejezést.

$$b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-3) = 25 - 24 = 1 > 0.$$

Tehát delta pozitív és ez azt jelenti, hogy van két különböző valós szám megoldása az egyenletnek

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5 + \sqrt{1}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-5 + 1}{-4} = \frac{-4}{4} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5 - 1}{-4} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2} .$$

Vannak olyan másodfokú egyenletek amelyeknek hiányzik az egyik tagja, ezeket meg lehet oldani képlet nélkül is.

$$ax^2 + bx = 0.$$

Ezt szorzatra bontással oldhatjuk meg éspedig kiemeljük az x tagot

$$ax^2 + bx = 0 \rightarrow x \cdot (ax + b) = 0 \rightarrow x = 0 \ vagy \ ax + b = 0.$$

$$x_1 = 0, x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Például

$$4x^2 - 12x = 0 \rightarrow x \cdot (4x - 12) = 0 \rightarrow x = 0 \ vagy \ 4x - 12 = 0 \ teh\acute{a}t$$

$$x_1 = 0 ,$$

$$4x - 12 = 0 \rightarrow x = \frac{12}{4} \rightarrow x_2 = 3.$$

A másik helyzet az, amikor az a tag hiányzik amelyikben csak az x szerepel . Ekkor az egyenletet a következőképpen rendezzük át

$$ax^2 + c = 0 \rightarrow ax^2 = -c \rightarrow x^2 = -\frac{c}{a}$$

Akkor van valós szám megoldása az egyenletnek , ha

$$-\frac{c}{a} \geq 0 \text{ tehát ha pozitív vagy 0 és ekkor gyököt vonunk mindkét oldalból}$$

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}, x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Nézzük mindezt egy példán keresztül

$$3x^2 - 5 = 0 \rightarrow 3x^2 = 5 \rightarrow x^2 = \frac{5}{3} > 0 \rightarrow$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{5}{3}}, \quad x_2 = -\sqrt{\frac{5}{3}}.$$

A másodfokú függvény

Az

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

függvénynek ha ’a’ negatív akkor maximuma van és ha ’a’ pozitív akkor pedig minimuma.

A maximum vagy a minuma helye az

$$x = -\frac{b}{2a}$$

számban van és ez az érték

$$-\frac{\Delta}{4a}.$$

Feladat

Határozzuk meg az

$$\boldsymbol{x \rightarrow x^2 + 10x + 21, \quad x \in R}$$

minimumhelyét és minimumának értékét.

$$a = 1, b = 10, c = 21$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 21 = 100 - 84 = 16.$$

A minimum helye

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{10}{2} = -5.$$

A minimum értéke pedig

$$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{16}{4} = -4\,.$$

Sorozatok

A sorozatok olyan számokból állnak amelyek valamilyen szabály szerint követik egymást. Példák